T.C.
Düzce Üniversitesi Mühendislik Fakültesi
Biyomedikal Mühendisliği Bölümü

MAT102 Matematik II

Süre: 90 dakika | *2016-2017 Bahar Dönemi Final Sınavı* | Toplam Puan: 100

Ögrenci ismi: ____________________ Ögrenci No: ____________________

Sorular:	1	2	3	4	**Toplam**
Puan:	25	25	25	25	100
Skor:					

Bu sınav toplam 100 puan değerinde 4 sorudan oluşmaktadır. Sınav süresi 90 dakikadır ve tüm soruların yanıtlanması gereklidir. Tüm işlemler bu sınav kagıdı üzerinde yapılacaktır. Kopya çekme ve çektirme girişiminde bulunanlar hakkında üniversitenin disiplin kuralları çerçevesinde işlem yapılacaktır. Lütfen düzgün ve okunaklı yazmaya özen gösteriniz. Başarılar...

Yrd. Doç. Dr. Fuat USTA

NOT: Her sorudan sadece istediğiniz iki seçeneği çözünüz. Her bir seçenek 12,5 puan değerindedir.

Sorular

1. (a)

$$\int \frac{\cos x \ln(\sin x)}{\sin x} dx$$

integralini hesaplayınız.

$u = \ln(\sin x)$ dönüşümünü yapalım. O halde $du = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot dx$ olur.

$$\int \frac{\cos x \cdot \ln(\sin x)}{\sin x} dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{[\ln(\sin x)]^2}{2} + C$$

bulunur.

(b)

$$\int \frac{3x^2+2x+1}{x(x-1)^2}dx$$

integralini hesaplayınız.

Basit kesirlere ayırma yöntemi uygularsa;

$$\frac{3x^2+2x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \Rightarrow A=1,\ B=2,\ C=6 \text{ olur}$$

$$\int \frac{3x^2+2x+1}{x(x-1)^2}dx = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{2}{x-1}dx + \int \frac{6}{(x-1)^2}dx$$

$$= \ln|x| + 2\ln|x-1| + \frac{6}{x-1} + c \quad \text{olur.}$$

7

(c)

$$f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x} \cos t^2 e^{t^2} dt$$

olduğuna göre $f'(1)$'i hesaplayınız.

İntegrallerin türevi kuralı uygularsa;

$$f'(x) = \cos x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \cos(\sqrt{x})^2 \cdot e^{(\sqrt{x})^2} \quad \text{olur.}$$

$$= \cos x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \cos x\, e^{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(1) = e\cos 1 - \frac{1}{2} e \cos 1 = \frac{1}{2} e \cos 1 \quad \text{olur}$$

7

2. (a) $a > 0$ olsun.

$$\int_0^a x^p dx$$

integralinin yakınsak olamsı için gerek ve yeter şartın $p > -1$ olduğunu gösteriniz.

$p=-1$ ise $\int_0^a x^p dx = \int_0^a \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to 0^+} \int_b^a \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to 0^+} \ln\left(\frac{a}{b}\right) = +\infty$

$p \neq -1$ ise $\int_0^a x^p dx = \lim_{b\to 0^+} \int_b^a x^p dx = \lim_{b\to 0^+} \frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_b^a$

$= \lim_{b\to 0^+} \frac{1}{p+1}\left(a^{p+1} - b^{p+1}\right)$

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a^{p+1}}{p+1}, & p+1>0 \\ +\infty, & p+1<0 \end{cases}$ olacağından verilen integral $p>-1$ için yakınsaktır.

(b)

$$\int_e^\infty \frac{2}{x(\ln x)^3} dx$$

integrali yakınsak mıdır? Yakınsak ise değerini bulunuz.

$\int_e^\infty \frac{2}{x(\ln x)^3} dx = \lim_{a\to\infty} \int_e^a \frac{2}{x(\ln x)^3} dx \Rightarrow u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$= \lim_{a\to\infty} \int_1^{\ln a} \frac{2}{u^3} du = 2 \cdot \lim_{a\to\infty} \int_1^{\ln a} u^{-3} du$

$= 2 \lim_{a\to\infty} \left(\frac{u^{-2}}{-2}\Big|_1^{\ln a} \right) = \frac{2}{-2} \lim_{a\to\infty} \left(\frac{1}{\ln^2 a} - 1 \right) = \frac{1}{1}$

(c)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+x^4}}dx$$

integralinin yakınsaklığını karşılaştırma testinden yararlanarak inceleyiniz.

Karşılaştırma testine göre

$$\frac{1}{\sqrt{x+x^4}} < \frac{1}{\sqrt{x^4}} = \frac{1}{x^2} \quad \text{ve} \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ yakınsak}$$

olduğu için verilen integral yakınsaktır.

3. (a) Kutupsal koordinatlardaki denklemi $r = 4(1+\sin\varphi)$ olan eğrinin $A(3, \frac{\pi}{6})$ noktasındaki teğet denklemini bulunuz.

$$\tan\psi = \frac{r}{r'} = \frac{4(1+\sin\varphi)}{4\cos\varphi} = \frac{1+\sin \pi/6}{\cos \pi/6} = \sqrt{3}$$

Yani $\psi = \frac{\pi}{3}$'dür. $\theta = \psi + \varphi = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ olur.

Yani aranan eğri x-eksenine diktir. ($x = a$ gibi)

$$x = r.\cos\varphi = 4(1+\sin\varphi).\cos\varphi = 4\left(1+\sin\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6} = 3\sqrt{3}$$

$x = 3\sqrt{3}$ olur.

$(r.\cos\varphi = 3\sqrt{3})$.

(b) Kartezyen koordinatlarda denklemi $x^2-y^2 = 25\sqrt{x^2+y^2}$ olan eğrinin kutupsal koordinatlardaki denklemini yazınız. Mümkünse $r = f(\varphi)$ biçimine getiriniz.

$x = r \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\varphi$ 'dir.

$r^2 \cdot \cos^2\varphi - r^2 \sin^2\varphi = 25 \cdot r \Rightarrow$

$r^2 \cos 2\varphi = 25 r \Rightarrow \quad r = 25 \cdot \sec 2\varphi$

(c) Kutupsal koordinatlarda denklemi $r = 2\sin\varphi\cot\varphi$ olan eğrinin kartezyen koordinatlardaki denklemini yazınız.

$r = 2 \cdot \sin\varphi \cdot \cot\varphi = 2 \cdot \sin\varphi \cdot \dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \Rightarrow$

$\Rightarrow r = 2 \cdot \cos\varphi \Rightarrow r^2 = 2 \cdot r \cdot \cos\varphi \Rightarrow$

$x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$

4. (a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{3^n (n!)^2}$$

serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Oran Testinden

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)!}{3^{n+1}[(n+1)!]^2} \cdot \frac{3^n \cdot (n!)^2}{(n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{3(n+1)^2} = 0$$

Yani $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$ old. 'dan seri yakınsaktır.

Ögrenci ismi:

Soru 4 devamı için diğer sayfaya geçiniz...

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^n$$

serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Kök Testinden

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{\ln n}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0 < 1$$

olduğundan seri yakınsaktır.

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$$

serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Limit Testinden

$$\lim_{n\to\infty} n^{\overset{\to p}{1}} \cdot a_n = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$ ve $p=1$ olduğundan

Seri ıraksaktır.