



T.C.
Düzce Üniversitesi Mühendislik Fakültesi
Biyomedikal Mühendisliği Bölümü

MAT 101 Matematik I

Süre: 75 dakika

2016-2017 Güz Dönemi Final Sınavı

Toplam Puan: 100

Öğrenci ismi: ██████████

Öğrenci No: ██████████

Sorular:	1	2	3	4	Toplam
Puan:	20	20	30	30	100
Skor:					

Bu sınav toplam 100 puan değerinde 4 sorudan oluşmaktadır. Sınav süresi 75 dakikadır ve tüm soruların yanıtlanması gereklidir. Tüm işlemler bu sınav kağıdı üzerinde yapılacaktır. Kopya çekme ve çektirme girişiminde bulunanlar hakkında üniversitenin disiplin kuralları çerçevesinde işlem yapılacaktır. Lütfen düzgün ve okunaklı yazmaya özen gösteriniz. Başarilar...

Sorular

1. (a) $y = \sqrt{x^3 + 3x + 4}$ fonksiyonunun grafiğine $x = 0$ noktasında teğet olan doğrunun denklemi bulunuz. [7]

$$y = f(x) = \sqrt{x^3 + 3x + 4} \Rightarrow f(0) = 2 \text{ . Yani fonksiyon } (0, 2)$$

noktasından geçiyor.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + 3x + 4}} \cdot (3x^2 + 3) \Rightarrow f'(0) = \frac{3}{2\sqrt{4}} = \frac{3}{4}$$

Buna göre $x=0$ noktasında teğet olan doğru denklemi

$$y - 2 = \frac{3}{4} \cdot (x - 0) \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + 2$$

Öğrenci ismi:

Soru 1 devamı için diğer sayfaya geçiniz...

- (b) $x \sin y = y \cos x$ kapalı tanımlı fonksiyonu için $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ noktasında y' türevinin değerini bulunuz.

[7]

$$x \cdot \sin y = y \cdot \cos x \implies \sin y + x \cdot \cos y \cdot y' = y' \cdot \cos x - y \cdot \sin x$$

$$x = \frac{\pi}{2}, y = \pi \text{ alırsak; } \sin \pi + \frac{\pi}{2} \cdot \cos \pi \cdot y' = y' \cdot \cos \frac{\pi}{2} - \pi \cdot \sin \frac{\pi}{2}$$

$$0 + \frac{\pi}{2} \cdot (-1) \cdot y' = y' \cdot 0 - \pi \cdot 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \cdot y' = -\pi$$

$$y' = 2 \text{ olur. Yani } y'|_{(\frac{\pi}{2}, \pi)} = 2$$

- (c) $y = \ln \sqrt{x+1}$ ise $\frac{d^2y}{dx^2}$ ifadesini hesaplayınız.

[6]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2(x+1)} = \frac{1}{2} \cdot (x+1)^{-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot (x+1)^{-2} = -\frac{1}{2(x+1)^2}$$

2. Her $x \in \mathbb{R}$ için $e^x \geq 1 + x$ olduğunu gösteriniz.

[20]

(Defterde Aynısı Var)

$x > 0$ olsun. $f(x) = e^x$ şeklinde tanımlasın.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonk. 'na $[0, x]$ aralığında ortolama değer teoremi uygulanırsa;

$$\frac{e^x - e^0}{x - 0} = e^c \quad (0 < c < x) \Rightarrow \frac{e^x - 1}{x} = e^c > e^0 = 1$$

$$\Rightarrow e^x > x + 1 \quad \text{olur.}$$

$x = 0$ ise $e^x = e^0 = 1 = 1 + 0 = 1 + x \Rightarrow e^x = 1 + x$ olur.

$x < 0$ ise $f(x) = e^x$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna $[x, 0]$ aralığında ortolama değer teoremi uygulanırsa;

$$\frac{f(0) - f(x)}{0 - x} = f'(c), \quad (x < c < 0) \quad \text{olacaginda}$$

$$\frac{1 - e^x}{-x} = e^c < e^0 = 1 \quad \text{olur. } x < 0 \Rightarrow -x > 0 \text{ oldugunda}$$

$$1 - e^x < -x \Rightarrow e^x > 1 + x \quad \text{olur.}$$

(Defterdeki de aynı mantık)

3. (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \cot x \ln(1+x)$ limitini hesaplayınız. [10]

$(0, \infty)$ belirsizliği var.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cot x \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cot x \cdot \ln(1+x)}{\sin x} = \frac{0}{0} \text{ belirsizliği olduğu.}$$

$$\text{L'Hop.} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \ln(1+x) + \cos x \cdot \frac{1}{1+x}}{\cos x} = \frac{0 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{1}}{1} = 1 //$$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{1/x}$ limitini hesaplayınız. $\Rightarrow \infty^0$ belirsizliği var. [10]

$$y = (\ln x)^{1/x} \text{ diyeğim} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{x} \cdot \ln(\ln x) \text{ olur.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln(x))}{x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ belirsizliği var.}$$

$$\text{L'Hop.} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}}{1} = 0 \text{ olur. } \lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} y = 0 \text{ ise}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{1/x} = 1 //$$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{3x+1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$ limitini hesaplayınız. [10]

$\rightarrow \infty - \infty$ belirsizliği var.

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(3x+1) \cdot \sin x - x}{x - \sin x} \stackrel{\text{L'Hop.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 \sin x + (3x+1) \cos x - 1}{\sin x + x \cdot \cos x} = \frac{0}{0}$$

$$\text{Tekrar L'Hop.} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 \cos x + 3 \cos x - (3x+1) \cdot \sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x}$$

$$= \frac{3+3-0}{1+1-0} = \frac{6}{2} = 3 //$$

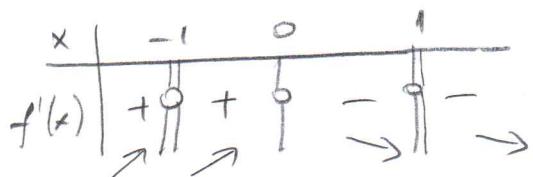
4. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ fonksiyonu veriliyor.

(a) f fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz. [3]

$$\text{Tanım Kümesi} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

(b) f nin kritik noktalarını bulunuz. Artan ya da azalan olduğu aralıkları belirleyiniz. Varsa yerel maksimum ve yerel minimum noktalarını bulunuz. [7]

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2} \quad \text{içerisi incelenebilir: } x_1 = 0, \underbrace{x_2 = 1}_{\substack{\text{Grafik} \\ \text{kat}}}, \underbrace{x_3 = -1}_{\substack{\text{Grafik} \\ \text{kat}}}$$



$(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \Rightarrow \text{ARTAN}$
 $(0, 1) \cup (1, +\infty) \Rightarrow \text{AZALAN}$

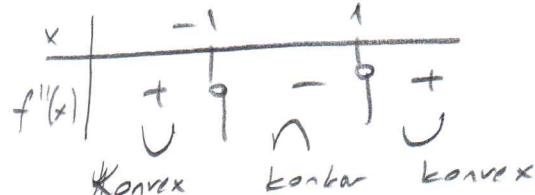
$x=0$ noktası yerel maksimum
 olup $f(0)=0$ dir.

(c) f nin varsa büküm noktalarını bulunuz. Konveks ya da konkav olduğu aralıkları belirleyiniz. [7]

$$f''(x) = \frac{2}{(x^2 - 1)^3} \quad \text{Bu değer sıfır olamaz. Dolayısıyla}\\
 \text{büküm noktası yok.}$$

→ İcerisi incelle

$$\underbrace{x_1 = 1}_{\substack{\text{teh} \\ \text{kat}}}, \underbrace{x_2 = -1}_{\substack{\text{teh} \\ \text{kat}}}$$



$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ konveks

$(-1, 1)$ konkav

(d) Varsa f nin tüm asimptotlarını bulunuz.

[7]

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x^2 - 1} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x^2 - 1} = -\infty$ } $x=1$ ve $x=-1$
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{x^2 - 1} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2}{x^2 - 1} = +\infty$ } duvey asimptot
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1$ old. don $y=1$ yatay asimptot

(e) f nin grafiğini çiziniz.

[6]

