T.C.

Düzce Üniversitesi Mühendislik Fakültesi

Biyomedikal Mühendisliği Bölümü

MAT 101 Matematik I

Süre: 75 dakika | *2016-2017 Güz Dönemi Final Sınavı* | Toplam Puan: 100

Ögrenci ismi: xxxxxxxx Ögrenci No: xxxxxxx

Sorular:	1	2	3	4	**Toplam**
Puan:	20	20	30	30	100
Skor:					

Bu sınav toplam 100 puan değerinde 4 sorudan oluşmaktadır. Sınav süresi 75 dakikadır ve tüm soruların yanıtlanması gereklidir. Tüm işlemler bu sınav kagıdı üzerinde yapılacaktır. Kopya çekme ve çektirme girişiminde bulunanlar hakkında üniversitenin disiplin kuralları çerçevesinde işlem yapılacaktır. Lütfen düzgün ve okunaklı yazmaya özen gösteriniz. Başarılar...

Sorular

1. (a) $y = \sqrt{x^3 + 3x + 4}$ fonksiyonunun grafiğine $x = 0$ noktasında teğet olan doğrunun denklemini bulunuz. [7]

$y = f(x) = \sqrt{x^3+3x+4} \Rightarrow f(0) = 2$. Yani fonksiyon $(0,2)$ noktasından geçiyor.

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3+3x+4}} \cdot (3x^2+3) \Rightarrow f'(0) = \frac{3}{2\sqrt{4}} = \frac{3}{4}$

Buna göre $x=0$ noktasında teğet olan doğru denklemi

$y - 2 = \frac{3}{4} \cdot (x - 0) \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + 2$

(b) $x \sin y = y \cos x$ kapalı tanımlı fonksiyonu için $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ noktasında y' türevinin değerini bulunuz. [7]

$x \cdot \sin y = y \cdot \cos x \Longrightarrow \sin y + x \cdot \cos y \cdot y' = y' \cdot \cos x - y \cdot \sin x$

$x = \frac{\pi}{2}$, $y = \pi$ alırsak; $\sin \pi + \frac{\pi}{2} \cdot \cos \pi \cdot y' = y' \cdot \cos \frac{\pi}{2} - \pi \cdot \sin \frac{\pi}{2}$

$0 + \frac{\pi}{2} \cdot (-1) \cdot y' = y' \cdot 0 - \pi \cdot 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \cdot y' = -\pi$

$y' = 2$ olur. Yani $y'\big|_{(\frac{\pi}{2}, \pi)} = 2$

(c) $y = \ln \sqrt{x+1}$ ise $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ifadesini hesaplayınız. [6]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x+1}} = \frac{1}{2(x+1)} = \frac{1}{2} \cdot (x+1)^{-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot (x+1)^{-2} = -\frac{1}{2(x+1)^2}$$

2. Her $x \in \mathbb{R}$ için $e^x \geq 1 + x$ olduğunu gösteriniz. [20]

(Defterde Aynısı Var)

$x > 0$ olsun. $f(x) = e^x$ şeklinde tanımlansın.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonk.'na $[0, x]$ aralığında ortalama değer teoremi uygulanırsa;

$$\frac{e^x - e^0}{x - 0} = e^c \quad (0 < c < x) \Rightarrow \frac{e^x - 1}{x} = e^c > e^0 = 1$$

$$\Rightarrow e^x > x + 1 \quad \text{olur.}$$

$x = 0$ ise $e^x = e^0 = 1 = 1 + 0 = 1 + x \Rightarrow e^x = 1 + x$ olur.

$x < 0$ ise $f(x) = e^x$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna $[x, 0]$ aralığında ortalama değer teoremi uygulanırsa;

$$\frac{f(0) - f(x)}{0 - x} = f'(c), \quad (x < c < 0) \quad \text{olacağından}$$

$$\frac{1 - e^x}{-x} = e^c < e^0 = 1 \quad \text{olur.} \quad x < 0 \Rightarrow -x > 0 \text{ olduğundan}$$

$$1 - e^x < -x \Rightarrow e^x > 1 + x \quad \text{olur.}$$

(Defterdeki de aynı mantık)

3. (a) $\lim_{x\to 0} \cot x \ln(1+x)$ limitini hesaplayınız. [10]

$(0 \cdot \infty)$ belirsizliği var.

$$\lim_{x\to 0} \cot x \ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x \cdot \ln(1+x)}{\sin x} = \frac{0}{0}$$ belirsizliği oldu.

L'Hop. $\Rightarrow$ $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cdot \ln(1+x) + \cos x \cdot \frac{1}{1+x}}{\cos x} = \frac{0 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{1}}{1} = 1$$

(b) $\lim_{x\to\infty} (\ln x)^{1/x}$ limitini hesaplayınız. $\Rightarrow$ ∞^0 belirsizliği var. [10]

$y = (\ln x)^{1/x}$ diyelim $\Rightarrow$ $\ln y = \frac{1}{x} \cdot \ln(\ln x)$ olur

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$ belirsizliği var.

L'Hop $\Rightarrow$ $$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}}{1} = 0$$ olur. $\lim_{x\to\infty} \ln y = \ln \lim_{x\to\infty} y = 0$ ise

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} (\ln x)^{1/x} = 1$$

(c) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{3x+1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$ limitini hesaplayınız. [10]

$\hookrightarrow$ $\infty - \infty$ belirsizliği var.

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{(3x+1) \cdot \sin x - x}{x \cdot \sin x} \overset{L'Hop}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{3\sin x + (3x+1)\cos x - 1}{\sin x + x \cdot \cos x} = \frac{0}{0}$$

Tekrar L'Hop. $\Rightarrow$ $$\lim_{x\to 0^+} \frac{3\cos x + 3\cos x - (3x+1) \cdot \sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x}$$

$$= \frac{3+3-0}{1+1-0} = \frac{6}{2} = 3$$

4. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$ fonksiyonu veriliyor.

(a) f fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz. [3]

Tanım Kümesi $= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

(b) f nin kritik noktalarını bulunuz. Artan ya da azalan olduğu aralıkları belirleyiniz. Varsa yerel maksimum ve yerel minimum noktalarını bulunuz. [7]

$f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$ işareti incelemeli: $x_1 = 0$, $\underbrace{x_2 = 1}_{\text{Çift kat}}$, $\underbrace{x_3 = -1}_{\text{Çift kat}}$

x		-1		0		1	
$f'(x)$	$+$	$\circ$	$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$-$
	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$

$(-\infty, -1)$ ve $(-1, 0)$ $\Rightarrow$ ARTAN

$(0, 1)$ ve $(1, +\infty)$ $\Rightarrow$ AZALAN

$x = 0$ noktası yerel maksimum olup $f(0) = 0$ dır.

(c) f nin varsa büküm noktalarını bulunuz. Konveks ya da konkav olduğu aralıkları belirleyiniz. [7]

$f''(x) = \dfrac{2}{(x^2-1)^3}$. Bu değer sıfır olamaz. Dolayısıyla büküm noktası yok.

$\hookrightarrow$ işareti incele

$\underbrace{x_1 = 1}_{\text{tek kat}}$, $\underbrace{x_2 = -1}_{\text{tek kat}}$

x		-1		1	
$f''(x)$	$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$
	$\cup$		$\cap$		$\cup$
	Konvex		konkav		konvex

$(-\infty, -1)$ ve $(1, +\infty)$ konvex

$(-1, 1)$ konkav

(d) Varsa f nin tüm asimptotlarını bulunuz. [7]

- $\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{x^2-1} = +\infty$, $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{x^2-1} = -\infty$
- $\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2}{x^2-1} = -\infty$, $\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2}{x^2-1} = +\infty$

$\Big\}$ $x=1$ ve $x=-1$ dikey asimptot

- $\lim_{x \to \mp\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1$ old.'dan $y=1$ yatay asimptot

(e) f nin grafiğini çiziniz. [6]