T.C.

Düzce Üniversitesi Mühendislik Fakültesi

Biyomedikal Mühendisliği Bölümü

BMM 211 Diferansiyel Denklemler

Süre: 75 dakika | *2016-2017 Güz Dönemi Final Sınavı* | Toplam Puan: 100

Ögrenci ismi: xxxxxxx Ögrenci No: xxxxxxx

Sorular:	1	2	3	4	**Toplam**
Puan:	25	25	25	25	100
Skor:					

Bu sınav toplam 100 puan değerinde 4 sorudan oluşmaktadır. Sınav süresi 75 dakikadır ve tüm soruların yanıtlanması gereklidir. Tüm işlemler bu sınav kagıdı üzerinde yapılacaktır. Kopya çekme ve çektirme girişiminde bulunanlar hakkında üniversitenin disiplin kuralları çerçevesinde işlem yapılacaktır. Lütfen düzgün ve okunaklı yazmaya özen gösteriniz. Başarılar...

Sorular

1. $\frac{y}{x}dx + (y^2 - \ln x)dy = 0$ diferansiyel denklemini bir integrasyon çarpanı bularak çözünüz. [25]

Dif. Denkleminde $M(x,y) = \frac{y}{x}$ ve $N(x,y) = (y^2 - \ln x) \Rightarrow M_y = \frac{1}{x} \neq -\frac{1}{x} = N_x$ TAM DEĞİL

$$\mu(y) = \exp\left\{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy\right\} = \exp\left\{\int \frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right) dy\right\} = \frac{1}{y^2}$$

Yeni Denklem $\frac{1}{yx}dx + \left(1 - \frac{\ln x}{y^2}\right)dy = 0 \Rightarrow M_y = -\frac{1}{y^2 x} = N_x$ (TAM) ✓

$M = \varphi_x = \frac{1}{yx} \Rightarrow \varphi(x,y) = \frac{1}{y}\cdot \ln x + h(y)$. Ayrıca $\varphi_y = N$ den

$$\varphi_y = -\frac{1}{y^2}\ln x + h'(y) = 1 - \frac{\ln x}{y^2} \Rightarrow h'(y) = 1 \Rightarrow h(y) = y$$

$\Rightarrow \varphi(x,y) = \frac{1}{y}\ln x + y = C$ olur.

2. $y_1(x) = x^{-1}$ in $x^2y'' + 3xy' + y = 0$, $x > 0$ diferansiyel denkleminin bir çözümü olduğunu gösteriniz. Sonrasında mertebe düşürme metodundan yararlanarak diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz. [25]

$y_1(x) = x^{-1}$, $y_1'(x) = -x^{-2}$ ve $y_1''(x) = 2x^{-3}$ dif. denk. yerine konursa

$$x^2 2x^{-3} - 3x x^{-2} + x^{-1} = 2x^{-1} - 3x^{-1} + x^{-1} = 0$$ olduğundan

$y_1(x) = x^{-1}$ dif. denk. bir çözümüdür.

$y_1(x) = x^{-1}$ dif. denk. bir çözümü olduğundan

$$y(x) = v(x)\, y_1(x) = v(x) \cdot x^{-1} = v x^{-1}$$

$$y'(x) = v' x^{-1} - v x^{-1}$$

$$y''(x) = v'' x^{-1} - v' x^{-2} - v' x^{-2} + 2 v x^{-3} = v'' x^{-1} - 2v' x^{-2} + 2 v x^{-3}$$

y, y' ve y'' dif. denk. yerine konursa;

$$x^2 y'' + 3xy' + y = 0$$

$$x^2(v'' x^{-1} - 2v' x^{-2} + 2 v x^{-3}) + 3x(v' x^{-1} - v x^{-1}) + v x^{-1} = 0$$

$$x v'' + v' = 0$$

Bu denklemde $v' = z$ dönüşümü yapılırsa;

$$x z' + z = 0 \Rightarrow \frac{z'}{z} = -\frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln \frac{z}{C_1} = -\ln x \Rightarrow z = \frac{C_1}{x}$$

$v' = z$ yerine konursa;

$$v' = z = \frac{C_1}{x} \Rightarrow dv = \frac{C_1}{x} dx \Rightarrow v(x) = C_1 \ln x + C_2$$

bunu $y(x) = v(x)\, x^{-1}$ 'de yerine koyarsak $y(x) = (C_1 \ln x) x^{-1} + C_2 x^{-1}$

#

3. $y'' + y = e^x \sin x$ diferansiyel denkleminin özel çözümünü bulunuz. Sonrasında $y(0) = 1$ ve $y'(0) = 2$ başlangıç koşulları altındaki çözümünü bulunuz. [25]

Homojen kısım için

Karakteristik Denklem: $r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 0 \pm i \Rightarrow \alpha = 0$, $\beta = 1$

$$y_h(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

$$= C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$$

$$\Rightarrow y_{ö}(x) = e^x (A \cos x + B \sin x)$$

$$y'_{ö}(x) = e^x \cdot [(A+B)\cos x + (B-A)\sin x]$$

$$y''_{ö}(x) = e^x [2B\cos x - 2A \sin x]$$

Bu değerler dif. denk. de yerine konursa; $A = -\frac{2}{5}$, $B = \frac{1}{5}$

$$y_{ö}(x) = -\frac{2}{5} e^x \cos x + \frac{1}{5} e^x \cdot \sin x$$

$$\# \quad y_g(x) = y_h(x) + y_{ö}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{2}{5} e^x \cos x + \frac{1}{5} \cdot e^x \sin x$$

Başlangıç koşullarından $C_1 = \frac{7}{5}$, $C_2 = \frac{11}{5}$

$$y(x) = \frac{7}{5} \cos x + \frac{11}{5} \sin x - \frac{2}{5} e^x \cdot \cos x + \frac{1}{5} \cdot e^x \cdot \sin x$$

4. Parametrelerin değişim metodunu kullanarak $y'' + y = \cot x$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz. [25]

Homojen kısmın karakteristik denklemi $r^2+1=0$

$r_{1,2} = 0 \pm i \cdot 1 \Rightarrow y_h(x) = C_1 \cdot \cos x + C_2 \sin x$

$$y(x) = -y_1 \int \frac{y_2(x) g(x)}{W(y_1,y_2)(x)} dx + y_2 \int \frac{y_1(x) g(x)}{W(y_1,y_2)(x)} dx$$

$$W(y_1,y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = 1$$

$$y_g(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \ln|\csc x + \cot x| \sin x$$

(Ayrıntılı çözüm defterinizde var)